Journal des Sciences
I.S.S.N 0851 – 4631

SUR LES SCS-MODULES

Al-Housseynou BA, Chérif Bachir Déme, Oumar DIANKHA
alhousseynou.ba@ucad.edu.sn, cherifbachir.deme@uadb.edu.sn,
odiankha@ucad.edu.sn

Université Cheikh Anta DIOP de Dakar, Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques et Informatique

Résumé:

Soient A un anneau commutatif admettant un élément unité $1\neq 0$ et M un A-module unitaire à gauche. Nous introduisons les SCS-modules dans la catégorie $\sigma[M]$ qui sont une extension des SCS-anneaux commutatifs étudiés dans [4]. $\sigma[M]$ est une sous-catégorie pleine de A-Mod dont les objets sont des sous-modules d'un A-module engendré par M. Soient Z l'anneau des entiers relatifs et $M=\oplus Z/pZ$ un module sur Z avec p un nombre premier. On a $M\in\sigma[Z]=Z\text{-Mod}$ est Hopfien mais il n'est pas finiment cogénéré. Dans ce papier, nous étudions les SCS-modules qui sont des modules pour lesquels tout objet Hopfien de $\sigma[M]$ est finiment cogénéré. Après avoir donné quelques propriétés des SCS-modules, on a pu caractériser les SCS-modules semi-simples et de type finis.

Abstract:

Let R be a commutative ring with unity $1\neq 0$ and M a unitary left-module over R. Here we introduce the SCS-modules on $\sigma[M]$ which are an extension of on commutative SCS-rings studied in [4]. The category $\sigma[M]$ is a full subcategory of R-Mod whose objects are modules subgenerated by M [6]. Let Z be ring of integers and $M=\oplus Z/pZ$ a Z-module. We have $M\in\sigma[Z]=Z\text{-Mod}$ is Hopfian but it is not finitely cogenerated. In this paper, we study modules for which any Hopfian object of $\sigma[M]$ is finitely cogenerated. Those modules are called SCS-modules. After giving some properties of SCS-modules, we characterize semi simple and finitely generated SCS-modules.

Mots clés: SCS-module, Hopfien, finiment cogénéré, longueur finie, type de représentation finie.

Keywords: SCS-module, Hopfian, finitely cogenerated, finite length, finite representation type.

1. INTRODUCTION

Dans cet article, nous considérons A un anneau commutatif admettant un élément unité $1\neq 0$ et M un A-module à gauche. Un module M est dit Hopfien si tout endomorphisme surjectif de M est un automorphisme. Un module N est dit engendré par un module M (ou M-engendré) s'il existe un ensemble $\wedge$ et un épimorphisme Φ:$M^{(\wedge)}\rightarrow$ N. Un sous-module de N est dit M-sous-engendré. Ainsi l'ensemble des sous-modules de N constitue la catégorie σ[M]([7]). Autrement dit: c'est une sous-catégorie pleine de A-Mod dont les objets sont les sous-modules d'un A-module M-engendré. Le but de ce travail est de caractériser les modules M pour lesquels tout objet Hopfien de σ[M] est finiment cogénéré. Et ces modules sont appelés SCS-modules. En effet, après avoir fourni quelques propriétés sur les SCS-modules, il a été démontré, dans le théorème 1, que si Mest un module semi-simple, alors M est un SCS-module si et seulement si M de type de représentation finie. Enfin dans le théorème 2, il a été prouvé que si M est de type fini, alors M est un SCS-module si et seulement si M est de longueur finie.

Un module M est dit finiment cogénéré si le socle de M est essentiel et de type fini. Un module est dit unisériel si ses sous-modules sont linéairement ordonnés par inclusion. Si un module M est somme directe de sous-modules unisériels, alors M est dit sériel. Un module est dit type de représentation sériel si tout élément de σ[M] est sériel. Un module M est dit premier si pour tout sous-module N de M, alors on a Ann(M)=Ann(N). Un module est dit de type sériel s'il est somme directe de modules unisériels de longueur finie. Enfin, un module M est dit fidèle si Ann(M)=0.

2. QUELQUES PROPRIETES SUR LES SCS-MODULES

Proposition 1 :

Soient A un anneau commutatif et M un SCS-module de type fini. Alors

(1) Si M est fidèle, alors A est un corps;
(2) Si M est premier, alors M est simple.

Preuve :

(1) Puisque M est de type fini, alors il en résulte que $\sigma[M]=A/Ann(M)$-Mod ([7]). Comme M est un SCS-module, alors A/Ann(M) est un SCS-anneau. Il en résulte de [4] que A/Ann(M) est artinien. Puisque M est un module de type fini sur un anneau artinien A/Ann(M), donc M est finiment cogénéré (10.18 de [3]).

Il est bien connu que tout module finiment cogénéré admet un sous-module simple. Soient N le sous-module simple de M et $f:A \to N$ un épimorphisme. D'après le premier théorème de l'isomorphisme $A/Ann(N) \cong N$, donc A/Ann(N)est simple. Comme M est fidèle, alors Ann(N)=0. D'où A est un corps.

(2) Soit $g:A \to M$ un épimorphisme. Il est évident de voir que $A/Ann(M) \cong M$. D'après (1), A/Ann(N) est simple avec N un sous-module simple de M. Comme M est premier, alors A/Ann(M)=A/Ann(N) d'où le résultat.

Proposition 2:

Soient A un anneau commutatif et M un SCS-module de type fini, alors M est de longueur finie.

Preuve:

Comme M est un SCS-module et $\sigma[M]=A/Ann(M)$-Mod, alors A/Ann(M) est aussi un SCS-anneau. Il s'ensuit que A/Ann(M) est un anneau artinien ([4]). Il en résulte que M est de longueur finie(15.21 [3]).

Corollaire 1:

Soient A un anneau commutatif et M un SCS-module de type fini. Pour tout objet N de $\sigma[M]$, les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) N est type fini;
(2) N est noethérien;
(3) N est artinien;
(4) N est de longueur finie.

Preuve:

D'après la proposition 2, $A/Ann(M)$ est un anneau artinien. Et on sait que tout objet de $\sigma[M]$ coïncide avec un module sur l'anneau $A/Ann(M)$. Soit N un objet de $\sigma[M]$ de type fini, donc N est aussi un module sur l'anneau $A/Ann(M)$. Ainsi, il résulte de [3](15.21) que N est artinien, noethérien et de longueur finie.

Proposition 3:

Soient A un anneau et M un A-module. Alors, les conditions suivantes sont vérifiées:\\

(1) Tout sous-module d'un SCS-module est un SCS-module;
(2) L'image homomorphe d'un SCS-module est un SCS-module;
(3) Soit $M=\Pi_{i\in I}M_i$ un produit direct de modules M_i avec $\sigma[M_i]\cap\sigma[M_j]=0$ pour tout $i \neq j$, si M est un SCS-module, alors pour tout $i\in I$, M_i est un SCS-module. Si de plus I est fini, alors la reciproque est vraie.

Preuve :

(1) Soient M un SCS-module et N un sous-module de M. Puisque $\sigma[M]$ est stable par sous-module, alors $N \in\sigma[M]$. $\sigma[N]$ constitue une sous-catégorie pleine de $\sigma[M]$. Soit K un élément Hopfien de $\sigma[N]$. Alors K est aussi un élément de $\sigma[M]$. Comme M est un SCS-module, alors K est finiment cogénéré d'où N est un SCS-module.
(2) Soit $f:M\to N$ un épimorphisme. Comme $N \in\sigma[M]$. Il résulte de (1) que N est un SCS-module.
(3) Soit $M=\Pi_{i\in I}M_i$ un SCS$-module.

Posons $\pi_j: \Pi_{i\in I}M_i\to M_j$ un homomorphisme surjectif, pour tout $j\in I$. Alors, d'après (2) M_j est un SCS-module pour tout $j\in I$.

Réciproquement, supposons N un élément Hopfien de $\sigma[M]$. Puisque I est fini il existe un isomorphisme $\pi:\Pi_{i=1}^{n}M_i\to\oplus_{i=1}^{n}M_i$ d'où $N\in\sigma[\oplus_{i=1}^{n}M_i]$. D'après [5], il existe $N_i\in\sigma[M_i]$ tel que $N=\oplus_{i=1}^{n}N_i$. Comme N est Hopfien donc chacun des $N_i$est Hopfien. Par suite, N_i est finiment cogénéré pour tout $i \in I$. Il en résulte que N est finiment cogénéré.

Proposition 4:

Soient A un anneau et M un A-module semi-simple. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) M est un SCS-module;

(2) il existe seulement dans σ[M] un nombre fini de modules simples non isomorphes deux à deux.

Preuve:

(1) ⇒(2) Soit $(N_i)_{i\in I}$ un système complet de représentants de classes d'isomorphisme de modules simples dans σ[M].

Posons $N=\oplus_{i=1}^{n}N_i$, alors N∈σ[M] car σ[M] est stable par somme directe. Comme N est Hopfien, alors il est finiment cogénéré. Par conséquent, I est fini.

(2) ⇒(1) Soit N un objet de σ[M]. Comme M est semi-simple, alors N est aussi semi-simple. Donc $N=\oplus_{i=1}^{n}N_i$ où N_i est simple et I fini. Puisque, pour tout i∈I, N_i est complètement invariant et cyclique, alors $N=\oplus_{i=1}^{n}N_i$est Hopfien et de type fini. Ainsi d'après [3] N est finiment cogénéré. Par conséquent, M est un SCS-module.

Un A-module M est dit localement de longueur finie (resp. localement noethérien) si tout sous-module de type fini de M est de longueur finie (resp. noethérien).

Proposition 5:

Soient A un anneau et M un module semi-simple. Si M est un SCS-module, alors les conditions suivantes sont vérifiées:

(1) Tout élément de σ[M] est de longueur finie;

(2) M est localement de longueur finie;

(3) M est de type sériel;

(4) M est localement noethérien.

Preuve:

(1) Soit N un objet de σ[M] tel que $N=\oplus_{i=1}^{n}N_i$où $N_i$simple. On a, pour tout i∈I, N_i est Hopfien. Ceci implique aussi que N est Hopfien car les N_i sont complètements invariants pour tout i∈I. Comme M est un SCS-module, alors N est finiment cogénéré. D'après le corollaire 10.16 de [3], N est de longueur finie.

(2) Soit Nun sous-module de type fini de M. En se référant au corollaire 10.16 de [3], N est de longueur finie. D'où M est localement de longueur finie.

(3) Soit N=$\oplus_{i=1}^{n}$ $N_i$avec N_i simple. Alors, N_i est unisériel car $0 \subset N_i$ et de longueur finie pour tout $i \in I$. Donc M est de type sériel.

(4) Résulte de (2).

Ainsi on a l'équivalence des assertions de la proposition 5 dans le corollaire suivant:

Corollaire 2 :

Soient A un anneau et M un module semi-simple. S'il existe seulement un nombre fini de modules simples dans σ[M], alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) M est un SCS-module;

(2) Tout élément de σ[M] est localement de longueur finie;

(3) M est de type sériel;

(4) M est localement noethérien.

Preuve :

(1) ⇒ (2) Ceci résulte de (1) de la proposition 5.

(2) ⇒(3) Soit N un objet de σ[M], alors N=$\oplus_{i \in I} N_i$ avec N_i simple pour tout $i \in I$. Donc, pour tout $i \in I$ N_i est unisériel et de longueur finie. D'où M est de type sériel.

(3) ⇒(4) Soit N un objet de σ[M] de type fini. Comme M est semi-simple, alors tout élément de σ[M] est semi-simple. Ainsi d'après le corollaire 10.16 de [3] N est finiment cogénéré.

(4) ⇒(1) Résulte de la proposition 4.

3. RESULTATS PRINCIPAUX

Théorème 1 :

Soient A un anneau commutatif et M un module semi-simple. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) M est un SCS-module;

(2) M est de type de représentation finie.

Preuve :

(1) $\Rightarrow$ (2) Montrons d'abord que M est de longueur finie.

Posons $M=\oplus_{i\in I}M_i$. Pour tout $i\in I$, M_i est simple donc Hopfien. Ce qui implique aussi que M est Hopfien. Comme M est un SCS-module alors, M est finiment cogénéré. Ainsi il résulte de [3] que M est de longueur finie.

Soit N un objet de $\sigma[M]$. Comme M est semi-simple alors, tout objet de $\sigma[M]$ est semi-simple. Donc $N=\oplus_{i\in I}N_i$ avec N_i simple. Pour tout $i\in I$, N_i on a $0\subset N_i$ donc N_i est unisériel. Alors, $N=\oplus_{i\in I}N_i$ est sériel. Puisque M est de longueur finie alors, d'après [7] M est de type de représentation finie.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit N un objet de type fini dans $\sigma[M]$. Comme M est semi-simple alors, N est semi-simple d'où N est finiment cogénéré.

Théorème 2 :

Soient A un anneau commutatif et M un module de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) M est un SCS-module;
(2) M est de longueur finie.

Preuve :

(1) $\Rightarrow$ (2) Cela résulte de la proposition 2.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit N un objet Hopfian de $\sigma[M]$. Comme M est de longueur finie alors il existe un sous-module simple M_0 dans M. Soit $f:N\rightarrow M_0$ un épimorphisme et $g: M_0\rightarrow N$ un monomorphisme. Puisque $g°f$ est un automorphisme, alors g est surjective. Donc N est simple donc cyclique (de type fini). Soit $R\rightarrow M$ un épimorphisme. Il est évident de voir que $M \cong R/Ann(M)$. D'après la proposition 1, N est un module sur l'anneau artinien R/Ann(M). Il résulte de la proposition 10.18 de [3] que N est finiment cogénéré.

Bibliographie

[1] A. BA, O. DIANKHA, On FGS-Modules Journal of Mathematics Research, Vol. 5, No. 1; 61-64 (2013) ISSN 1916-9795

[2] A. Chambert-Loir, Algèbre commutative, Centre de Mathématique, Ecole polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, Paris 6,2001.

[3] Anderson F.W and Fuller K, Rings and categories of modules}, Springer-Verlag, 1974.

[4] A. Mbaye, M. Sangharé, S. D. Touré, On Commutative SCI-Rings and Commutative SCS-Rings,International Journal of Algebra, Vol. 4, 2010, no. 12, 585 – 590.

[5] Vanaja N, All finitely generated M-subgenerated modules are extending, Comm. Algebra 24(2), 543-572 (1996).

[6] Wisbauer R, Decomposition properties in modules categories, Acta. Univ. Corilia Math. Physica l26(26), 57-68(1985).

[7] Wisbauer R, Foundation of Module and Ring theory, Gordon and Breach Science Publishers (1991)